CRANGĂ CLEOPATRA

FUNCTII ELEMENTARE ÎN MATEMATICA

Editura STEF DROBETA TURNU SEVERIN

2023

Referent ştiinţific:
Prof univ dr Tomita Vasile

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
CRANGĂ CLEOPATRA
Funcţii elementare în matematică / Crangă Cleopatra. - Drobeta-Turnu Severin : Editura Ştef, 2023
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-597-893-5

371.26:373.3

OP 4 CP 401
Drobeta Tr.-Severin
+40 744 495 186
e-mail: office.editurastef@yahoo.com
office.editurastef@gmail.com

ISBN: 978-606-597-893-5

Capitolul I

Noţiuni generale despre funcţii şi modul lor de definire

1.1. Introducere în noţiunea de funcţie

Într-o expunere făcută de L.Euler[1] în anul 1749 se menţionează de mai multe ori noţiunea de **funcţie ca fiind o mărime variabilă ce depinde de o altă mărime variabilă**. Pentru unele scopuri, o astfel de definiţie este suficientă. Însă în dezvoltarea ulterioară a matematicii s-a impus necesitatea de a se da noţiunii de funcţie un conţinut mai general şi mai abstract. Nu dependenţa variabilelor (prin care de obicei se înţeleg numere care pot fi comparate în ceea ce priveşte mărimea) este esenţială în conţinutul noţiunii de funcţie, ci **corespondenţa** prin care anumitor obiecte li se asociază alte obiecte. În felul acesta, noţiunea de funcţie se fundamentează pe noţiuni ale teoriei mulţimilor. O bară metalică prin încălzire îşi modifică dimensiunile, de exemplu o bară de cupru de lungime 200 cm la 0^0 C, va avea la la o temperatură de t^o C lungimea de $l= 200(l_0 +0,000016 *t)$. Această formulă pune în corespondenţă fiecărei temperaturi t^0 C cuprinsă între 0^0 C şi 100^0 C o anumită lungime l cuprinsă între 200 cm şi 200,32 cm. În mod analog fiecărei cantităţi dintr-o anumită marfă îi corespunde o anumită sumă de bani, preţul de vânzare.

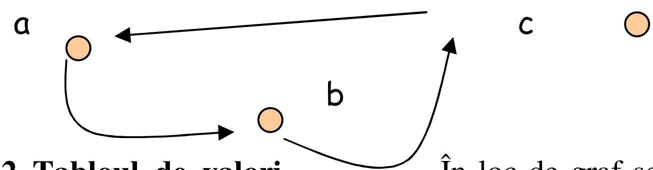
În felul acesta, pot fi puse în corespondenţă nu numai mulţimi de numere ci şi mulţimi generale astfel încât elementelor $a \in A$ le corespund elemente $b \in B$. Astfel

[1] **LEONHARD EULER** (BASEL, 15.04.1707- PETESBURG, 18.09.1783) matematician , mecanician , astronom şi fizician elveţian.

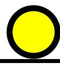
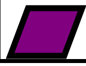
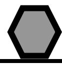
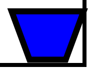
corespondenţa este determinată de o **relaţie între elemente din mulţimea A şi elemente din mulţimea B.**

Pentru a descrie o funcţie trebuie stabilite **domeniul de definiţie, domeniul valorilor şi corespondenţa dintre acestea.**

1.1.1 Graful. O funcţie poate fi reprezentată grafic printr-un **graf** în care domeniul de definiţie şi domeniul valorilor sunt reprezentate prin desene iar corespondenţa se indică prin săgeţi.



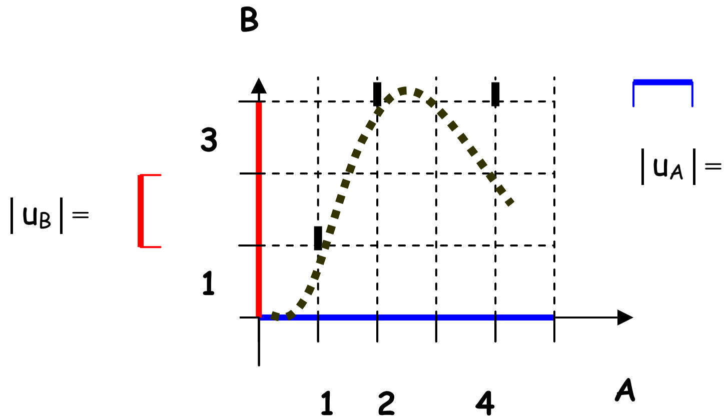
1.1.2 Tabloul de valori. În loc de graf se poate folosi pentru reprezentarea unei funcţii un tabel de valori, pe rândul de sus se trec elementele domeniului de definiţie iar pe rândul de jos se trec elementele domeniului valorilor.

Domeniul de definiţie	1	2	3	4	5	6	7
Domeniul valorilor							

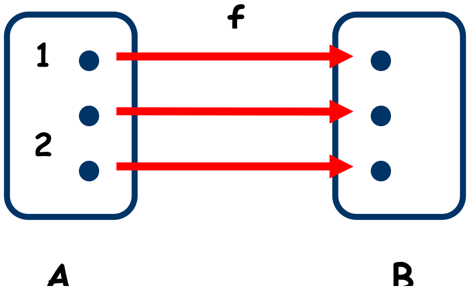
1.1.3.Exprimarea prin text. Există situaţii în care **domeniul de definiţie şi domeniul de valori** nu pot fi reprezentate printr-un graf sau printr-o tabelă de valori. În acest sens un exemplu funcţia lui L. Euler ce asociază oricărui număr raţional valoarea 1, iar oricărui număr iraţional valoarea 0. Sau utilizând simboluri matematice:

$$f(x)=\begin{cases}1 \Leftrightarrow x \in Q \\ 0 \Leftrightarrow x \in R - Q\end{cases}$$

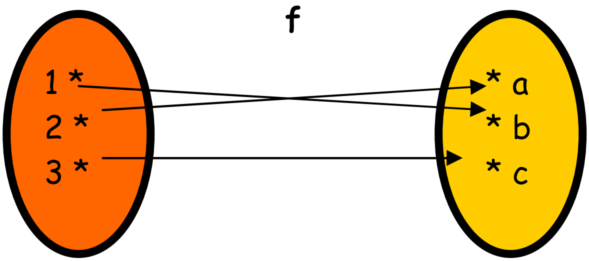
1.1.4.Diagrama. O funcţie mai poate fi reprezentată **printr-o diagramă** considerându-se axa orizontală ca domeniu de definiţie, axa verticală - domeniul valorilor, iar punctele de pe curba ca definind corespondenţa. Curba sau punctele rezultante trebuie să fie însă astfel încât fiecărui punct al axei orizontale să-i corespundă cel mult un punct al curbei. Din acest motiv nu orice curbă reprezentată într-un sistem ortogonal de axe poate fi privită ca reprezentarea grafică a unei funcţii.



1.1.5.Diagramele cu săgeţi. Este una din modalităţile frecvent utilizate pentru înţelegerea conceptului de corespondenţă ce reprezintă funcţie. Domeniul de definiţie, respectiv codomeniul funcţiei sunt reprezentate grafic prin figuri geometrice cum ar fi cerc, pătrat, dreptunghi, oval, curbe închise etc., elementele mulţimilor fiind precizate în interiorul acestora, iar legea de corespondenţă este dată prin săgeţi.



Sau



1.1.6.Noţiunea de formulă. Cea mai frecventă formă de reprezentare a unei funcţii în matematică este printr-o formulă. În acest caz elementele domeniului de definiţie şi a domeniului de valori nu pot fi decât numere sau „obiecte matematice” pentru care s-au introdus reguli de calcul. De exemplu y = x + 2 sau y = sin **x** .

Forma explicită. Forma y = F(x) a unei egalităţi funcţionale, în care F(x) este o expresie oarecare ce depinde doar de variabila x, se numeşte **formă explicită.**

Forma implicită. Spre deosebire de forma explicită în forma implicită variabilele nu sunt izolate. Când o egalitate funcţională se dă sub forma implicită atunci o variabilă se consideră dependentă iar cealaltă independentă. Este de remarcat faptul că nu întotdeauna o exprimare implicită poate fi adusă la forma explicită . De exemplu ecuaţia cercului cu centrul în origine şi rază 2 data de F(x,y): $x^2 + y^2 = 4$. Exprimarea lui y în funcţie de x ar fi următoarea: $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Ar fi însă o greşeală să se considere ca această exprimare reprezentarea unei funcţii, deoarece nu este univocă.

1.1.7. Relaţii de recurenţă(funcţională).

1. Este cazul particular al **şirurilor** de numere reale în care un termen se exprimă în funcţie de unul sau mai mulţi termeni din şir în ipoteza că se cunosc unul sau mai mulţi termeni ai şirului. Relaţiile de recurenţă se pot împărţi în trei categorii:

a. relaţii de recurenţă liniare de ordinul I. Relaţia $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$ pentru α=1 şi β=r fixat număr real atunci şirul definit prin relaţia de recurenţă devine $a_{n+1} = a_n + r$ $n \geq 1$; a_1=a fixat, l-am numit **progresie aritmetică** cu primul termen **a** şi raţie **r.**

b. relaţii de recurenţă liniare de ordinul II. Relaţia $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ cu $n \geq 0$. Dacă $a_0 = a_1 = 1$ şi α=β=1 se obţine şirul: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… numit şirul lui Fibonacci.

2. Relaţii de recurenţă de tipul implicit: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sau $f(xy) = f(x)f(y)$

Corespondenţe de tip funcţie ce sunt obţinute pe cale experimentală, prin studierea unui fenomen: electrocardiograma, cursul de schimb valutar, etc.

În concluzie există două moduri de definire a funcţiilor **sintetic – când corespondenţa poate fi precizată element cu element** şi **analitic – când corespondenţa este precizată prin enunţul unei formule sau proprietăţi comune**.

În cele ce urmează voi sintetiza câteva rezultate teoretice ce sunt utile în formarea conceptului de funcţie bazându-mă pe elemente de teoria mulţimilor.

1.2. Noţiuni generale despre mulţimi, operaţii cu mulţimi

Noţiunea de **mulţime** este adoptată în sensul comun al termenului; termeni sinonimi fiind: **colecţie, grupare** de obiecte. O mulţime este **descrisă** fie prin **indicarea sau enumerarea** obiectelor sale **fie** printr-o **proprietate comună** a acestora. Mulţimile se notează în general cu litere mari: **A, B, …, N, …R,...X, Z**, etc. **Un obiect** generic al **mulţimii** îl vom numi în mod uzual **element** al mulţimii. Elementele unei mulţimi sunt notate în general prin litere mici: **a, b, c,…….x, y, z,** etc. sau alte simboluri cărora li s-a acordat un sens sau semnificaţie. De exemplu: 0, 1, 2, …9 – cifre.

Dacă o mulţime este descrisă prin **enumerarea** elementelor sale atunci ea se notează cu literă mare urmată de enumerarea elementelor sale între acolade, astfel

A = { x, y, z }

Dacă o mulţime este descrisă **printr-o proprietate comună** a elementelor sale atunci ea se notează cu literă mare urmată de enunţul proprietăţii comune, astfel

B = { x │ x are proprietatea P }

Simbolul **„∈ ”** desemnează **relaţia de apartenenţă** a **unui element** la **o mulţime.** Elementul **x ∈ A** dacă şi numai dacă x este un element al mulţimii A. Relaţia duală este „∉” şi enunţul **z ∉ B** semnifică faptul că elementul **z nu aparţine** mulţimii B.

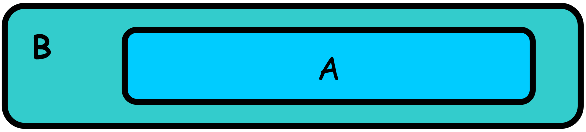
Definiţie: Mulţimea fără nici un element o vom numi mulţimea vidă şi o vom nota cu simbolul Ø.

Definiţie: Despre două mulţimi **A, B** spunem **că coincid** sau **sunt egale** dacă **orice element al mulţimii A**

aparţine mulţimii B şi reciproc. Altfel spus mulţimile A, B sunt constituite exact din aceleaşi elemente.

Notaţie: $A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ şi $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$

Definiţie: Despre mulţimea **A** spunem că este **parte sau submulţime** a mulţimii B dacă orice element din A se găseşte în B.



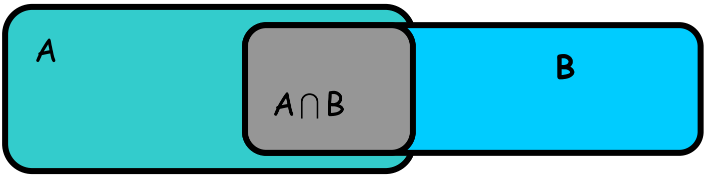
Notaţie: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Observaţie: Devine evident faptul că relaţia $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ şi $B \subset A$

Definiţie: Fiind date mulţimile A, B prin **intersecţia** acestora înţelegem mulţimea formată **doar din elementele comune.** Aceasta mulţime se notează cu:

$\mathbf{A \cap B} = \{ x \in A \wedge x \in B \}$

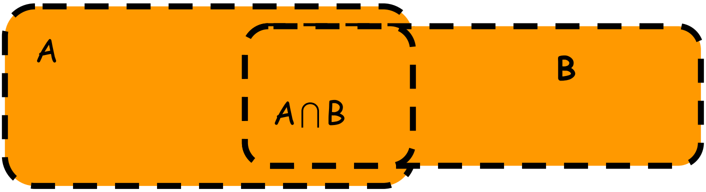
Utilizând o diagramă **Venn Euler** intersecţia a două mulţimi poate fi reprezentată astfel:



Definiţie: Fiind date mulţimile A, B prin **reuniunea sau reunirea** acestora înţelegem mulţimea formată din elementele necomune şi comune, cele comune fiind luate o singură dată. Aceasta mulţime se notează cu:

$\mathbf{A \cup B} = \{ x \in A \vee x \in B \}$

Utilizând o diagramă **Venn Euler** reuniunea a două mulţimi poate fi reprezentată astfel:



A⋃B

Definiţie: Fiind date mulţimile A, B prin **mulţimea diferenţa A – B** înţelegem mulţimea formată doar din elementele mulţimii A necomune mulţimii B.

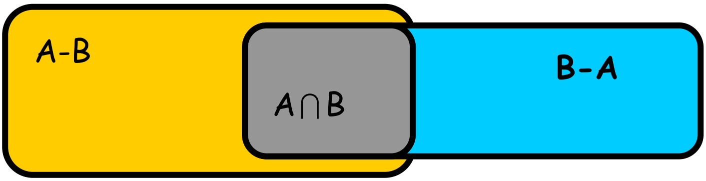
Aceasta mulţime se notează cu:

A - B = $\{ x \in A \wedge x \notin B \}$.

În mod asemănător se defineşte şi mulţimea

B - A = $\{ x \notin A \wedge x \in B \}$

Utilizând o diagramă **Venn Euler** diferenţa mulţimilor **A – B** şi **B - A** poate fi reprezentată astfel:



A⋃B

A **B**

Devin evidente relaţiile : $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) = A \cup (B-A) = B \cup (A-B)$

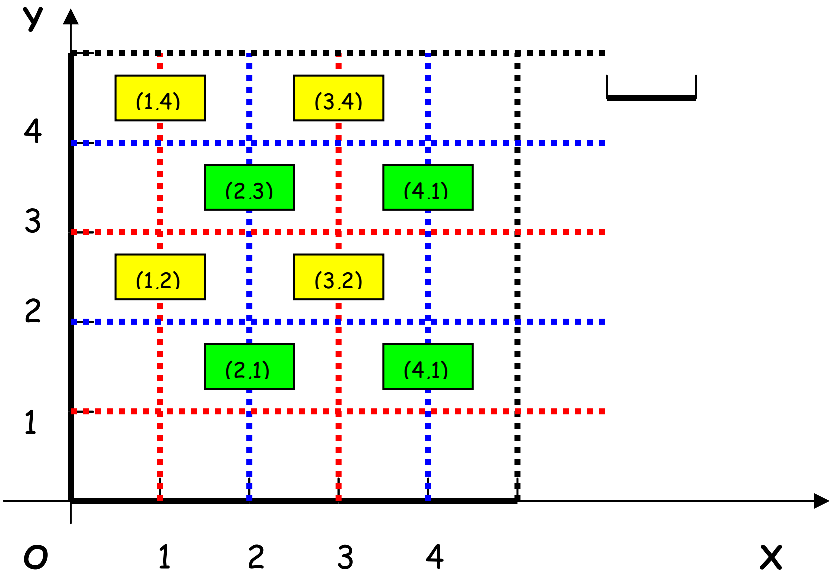
Sau: $A = (A-B) \cup (A \cap B)$ şi $B = (A \cap B) \cup (B-A)$

Definiţie: Fiind date mulţimile A şi B înţelegem prin mulţimea produs cartezian $A \times B$ mulţimea tuturor perechilor ordonate (x,y) cu $x \in A$ şi $y \in B$.

Astfel: $A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$.

Observaţie: $A \times B \neq B \times A$

Exemplu: Dacă A= {1,3} ; B={2,4 } atunci: $A \times B$ = {(1,2), (1,4), (3,2), (3,4)} şi $B \times A$ = {(2,1), (2,3),(4,1), (4,3)}Într-un sistem cartezian de axe diferenţa devine evidentă:



1.3. Relaţii binare între mulţimi.

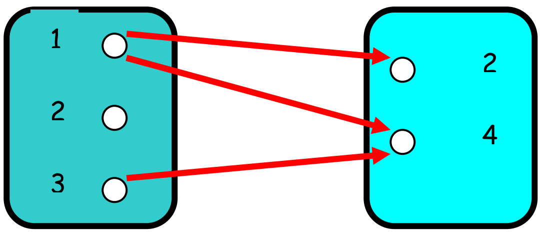
Definiţie: Fie A şi B două mulţimi şi ρ o submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Spunem că elementele $x \in A$ şi elementele $y \in B$ sunt în relaţie ρ şi notăm x ρ y dacă şi numai dacă $(x,y) \in \rho$. **Mulţimea X :** $x \in X \subset A$ astfel încât $\exists$ $y \in Y \subset B$ şi x ρ y se numeşte **domeniu de definiţie al relaţiei ρ (domeniu - mulţime de plecare)**, iar **mulţimea Y** se numeşte **domeniul valorilor relaţiei ρ (codomeniu - mulţime de sosire).**

Exemplu 1.: Dacă A= {1,3} ; B={2,4 } atunci: $A \times B$ = {(1,2), (1,4), (3,2), (3,4)} şi **ρ =** {(1,2), (3,4)} $\subset A \times B$ atunci X= A= {1,3} ; Y= B = {2,4 }

Exemplu 2.: Dacă A= {1,2,3} ; B={2,4 } atunci:

$A\times B$ = {(1,2), (1,4),(2,2), (2,4) (3,2), (3,4)} şi **ρ =** {(1,2),(1,4) (3,4)} $\subset$ $A\times B$ atunci X= {1,3}$\subset$A ; Y= B = {2,4 } . Realizăm astfel că **1 ρ 2 , 1 ρ 4, 3 ρ 4** altfel spus relaţia ρ asociază elementului 1 două elemente pe 2 respectiv 4, respectiv elementului 3 pe 4.

X= {1,3}$\subset$A **ρ** Y= B = {2,4 } .



ρ = {(1,2),(1,4) (3,4)} $\subset$ $A\times B$

În cele ce urmează voi prezenta doar acele relaţii ce asociază oricărui element din mulţimea de definiţie un singur element în mulţimea codomeniu numite **relaţii univoce**.

1.4. Noţiunea de funcţie.

Definiţie: Fie **A** şi **B** două mulţimi nevide. Spunem că am definit **o funcţie** pe mulţimea A cu valori în B dacă printr-un **procedeu oarecare (relaţie)** facem ca **fiecărui element** $x \in A$ să-i corespundă **un singur element** $y \in B$.

Notaţie: O funcţie definită pe A cu valori în B se notează **f : A → B** (citim "f definită pe A cu valori în B"). Uneori o funcţie se notează simbolic **A → B, x → y = f(x)** (citim: "f de x"), unde y este **imaginea elementului** x din **A** prin funcţia **f** sau **valoarea funcţiei** f **în** x. Elementul x se numeşte **argument al funcţiei** sau **variabilă independentă**.

Mulţimea **A** se numeşte **domeniul de definiţie** a funcţiei f iar **B** se numeşte **mulţimea în care funcţia ia valori** sau **codomeniul** funcţiei **f**.

Dacă **f** este o **funcţie** de la **A** la **B**, atunci se mai spune că f este **o aplicaţie** de la **A** la **B**.

De obicei funcţiile se notează cu litere mici **f, g, h**, … iar mulţimea tuturor funcţiilor definite pe mulţimea **A** cu valori în mulţimea **B** se notează cu F(A, B).

În concluzie o corectă definire a unei funcţii presupune existenţa a trei elemente:

A= domeniul de definiţie al funcţiei

B= codomeniul funcţiei

f= legea de **corespondenţă** ce leagă cele două mulţimi.

1.5. Moduri de definire a unei funcţii.

După cum am văzut în capitolul introductiv, indiferent de modul în care este definită o funcţie trebuie precizate cele trei elemente care o caracterizează: **domeniul de definiţie, codomeniul şi legea de corespondenţă**.

Există în principal **două moduri** fundamentale de definire a funcţiilor: **sintetic** şi respectiv **analitic**.

În cele ce urmează voi exemplifica cele două moduri de definire în sens general dar şi particular pentru funcţiile elementare studiate.

a. Funcţii definite sintetic corespund acelor funcţii f : A $\to$ B pentru care se indică fiecărui element x din A elementul y = f (x) din B sau altfel spus corespondenţa este precizată “element cu element”

Acest lucru se poate face fie cu ajutorul **diagramei cu săgeţi**, fie cu ajutorul **tabelului de valori** sau **printr-un tablou**.

Acest mod de a defini o funcţie se utilizează când **A=domeniul de definiţie** este o mulţime **finită.**

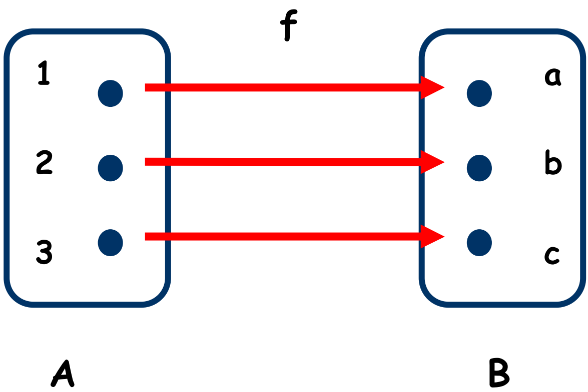
Exemplu: Fie f : {1, 2, 3} → {a,b,c} definită prin **f (1) = a f (2) = b, f (3) = c.**

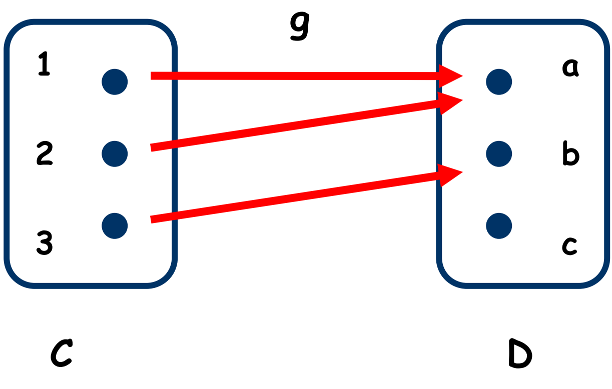
În diagrama cu săgeţi sunt reprezentate **mulţimile** prin **diagrame,** iar **legea de corespondenţă** prin **săgeţi**. Faptul că fiecărui element x din A îi corespunde un unic

element y = f (x) din B înseamnă pentru diagrama cu săgeţi că din fiecare element din A pleacă o singură săgeată.

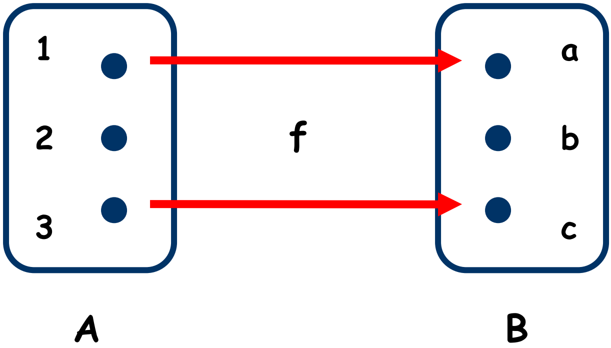
Cum pentru elementele codomeniului nu avem nici o exigenţă

înseamnă că într-un astfel de element pot ajunge una, mai multe săgeţi sau chiar niciuna.





Un **contraexemplu** de lege de corespondenţă ce nu reprezintă o funcţie (ci doar o relaţie) este reprezentat în diagrama de mai jos:



Elementului 2 ∈ A nu-i corespunde nici un element din B sau din 2 nu porneşte nici o săgeată înspre un element din B.

Contraexemplul de mai sus specifică o altă situaţie în care elementului 2 ∈ A nu-i corespunde nici un element din B sau din 2 nu porneşte nici o săgeată înspre un element din B şi elementului 1 ∈ A îi corespund două elemente din B, f(1)=a şi f(1)=b.

Aceleaşi funcţii definite la exemplele de mai sus le putem descrie şi utilizând **tabelele de valori**, acestea fiind formate din două linii, în prima linie se trec elementele mulţimii pe care este definită funcţia (domeniul de definiţie al funcţiei) iar pe linia a doua valorile funcţiei în aceste elemente.

x	1	2	3	A
y = f(x)	a	b	c	f(A) $\subseteq$ B

Definiţie: Prin mulţimea f(A) = $\{ y \in B \mid \exists x \in A$ $y=f(x) \}$ înţelegem **imaginea** mulţimii **A** prin intermediul funcţiei **f** aceasta notându-se şi **Imf,** aceasta fiind o submulţime a codomeniului nu neaparat egală ca mulţime cu codomeniul.

Exemplu: În funcţia f : {-1, 0, 1, 2} $\rightarrow$ {a, b, c, d, e} definită cu ajutorul tabelului de valori de mai jos.

X	-1	0	1	2	A
Y = f(x)	a	b	A	c	Imf=f(A) $\subseteq$ B = {a, b, c, d, e}

Atunci **Imf** = {f(-1), f(0), f(1), f(2)} = {a, b, c} $\subset$ B.

Exemplu: Funcţia f : {1, 2, 3, 4} $\rightarrow$ {1, 2, 3, 4} definită prin f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 2 poate fi reprezentată sub forma unui **tablou** unde în prima linie avem domeniul de definiţie iar în linia a doua sunt valorile funcţiei în punctele domeniului (3 este valoarea lui f în x = 1, 1 este valoarea lui f în x = 2, etc.). O astfel de funcţie se numeşte **permutare** de gradul patru. O astfel de reprezentare este **f**=$\begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}$

Observaţie. Nu putem defini sintetic o funcţie al cărui **domeniu de definiţie** are o **infinitate** de elemente.

b. Funcţii definite analitic. Funcţiile f : A$\rightarrow$ B (unde A,B $\subseteq$ R)definite cu ajutorul unei (sau a unor) **formule,** sau a unor proprietăţi sunt funcţii definite analitic. Corespondenţa f leagă între ele elementul arbitrar x din A de imaginea sa y = f(x).

Exemplu:

1) Fie funcţia f : R $\rightarrow$ R, f(x) = x^2+1. Această funcţie asociază fiecărui număr real x numărul x^2+1.

2) Funcţia f : Z $\rightarrow$ Z, $f(x)=\begin{cases} 2x - 1, \text{ dacă x este par} \\ 2x + 1, \text{ dacă x este impar,} \end{cases}$

este exemplu de funcţie definită prin două formule.

Funcţiile definite prin mai multe formule se numesc **funcţii multiforme.**

Observaţie. În cazul funcţiilor multiforme, fiecare formulă este valabilă pe o anumită submulţime a lui A şi deci **două formule nu pot fi folosite pentru determinarea imaginea unuia şi aceluiaşi element.**

Cea mai frecventă reprezentare a unei funcţii în matematică este printr-o formulă. În acest caz, elementele domeniului de definiţie şi ale domeniului valorilor nu pot fi decât numere sau “obiecte matematice” pentru care s-au introdus reeguli de calcul corespunzătoare. De exemplu: y = f(x) = 4x – 2. f: **R**$\rightarrow$ **R.**

Observaţie: Când asupra domeniului de definiţie nu s-au făcut ipoteze speciale, se consideră ca făcând parte din acesta toate numerele reale, cărora din formula respectivă li se pune în corespondenţă o anumită valoare.

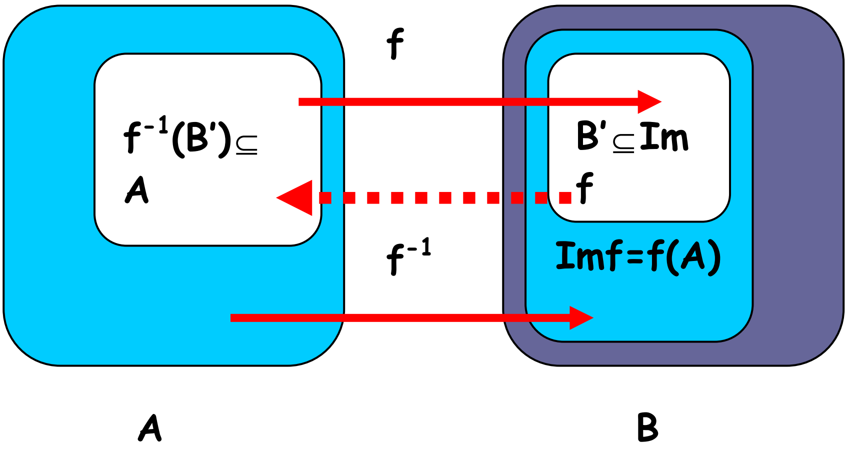
De exemplu în cazul funcţiei $y = 4x - 2$, domeniul de definiţie este alcătuit din mulţimea numerelor reale.

Definiţie. Fie $f : A \to B$, $g : C \to D$ două funcţii; f, g sunt **funcţii egale** (notând $f = g$) dacă: $A = C$ (funcţiile au acelaşi domeniu de definiţie)

$B = D$ (funcţiile au acelaşi codomeniu)

$f(x) = g(x), \forall x \in A$ (punctual, funcţiile coincid).

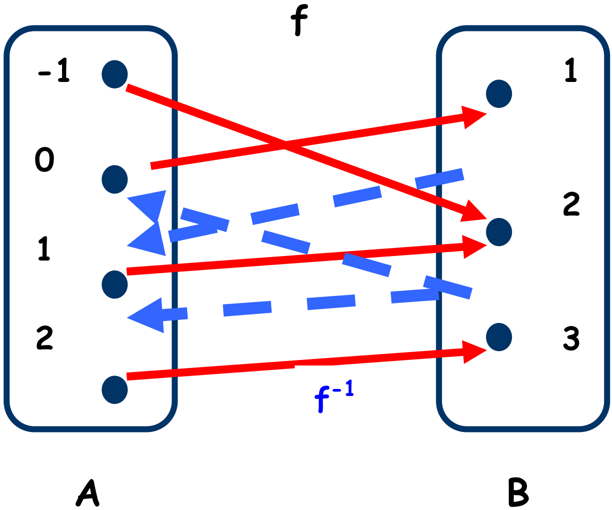
Definiţie. Fie $f : A \to B$. Se numeşte **imaginea reciprocă a unei părţi** B' a lui B, notată $\mathbf{f^{-1}(B')}$, submulţimea lui A formată din acele elemente ale căror imagini prin f aparţin lui B'. Deci, $\mathbf{f^{-1}(B')} = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$.



Exemplu: Se consideră funcţia $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ definită prin diagrama cu

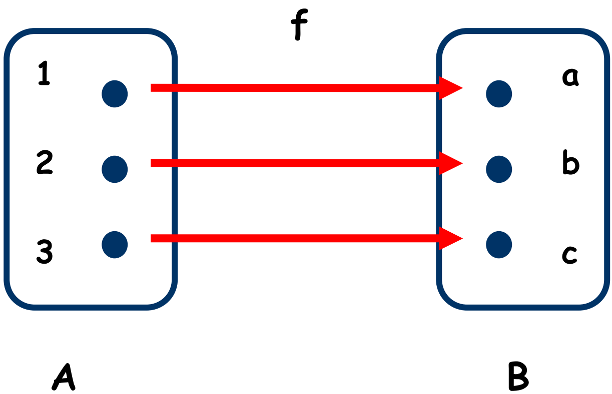
săgeţi. În acest caz, $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$, deoarece $f(0) = 1$; $f^{-1}(\{2\}) = \{-1, 1\}$ pentru că $f(-1) = f(1)$

= 2; $f^{-1}(\{1,2\}) = \{-1, 0, 1\}$, deoarece f(-1) = 2, f(0) = 1, f(1) = 2.



1.6. Graficul unei funcţii.

Definiţie: Fie o funcţie $f : A \to B$. Se numeşte **graficul funcţiei** f mulţimea de cupluri $\mathbf{G_f} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$.



Exemple:

1) Fie funcţia definită de diagrama de mai jos

Atunci graficul său este mulţimea $\mathbf{G_f} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\} = \{(1,a), (2,b),(3,c)\}$.

2) În funcţia $f : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, 0, 2, 3\}$ definită cu ajutorul tabelului de valori de mai jos.

x	-1	0	1	2	A
Y = f(x)	2	3	-2	0	Imf=f(A) $\subseteq$ B = {a, b, c, d, e}

În acest caz, graficul lui f este mulţimea $G_f = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -2), (2, 0)\}$.

Dacă funcţia $f : A \rightarrow B$ este o **funcţie numerică (A,B $\subseteq$ R)**, atunci la produsul cartezian $A \times B \subseteq R \times R$, unui cuplu (x, y) din A x B i se poate asocia în planul în care se consideră un reper cartezian (planul cartezian) un punct M(x, y) (punctul M având coordonatele x, y, componentele cuplului). Cum mulţimea R x R se reprezintă geometric prin planul cartezian, se poate deduce că: **graficul funcţiei numerice se reprezintă geometric printr-o anumită submulţime a planului.**

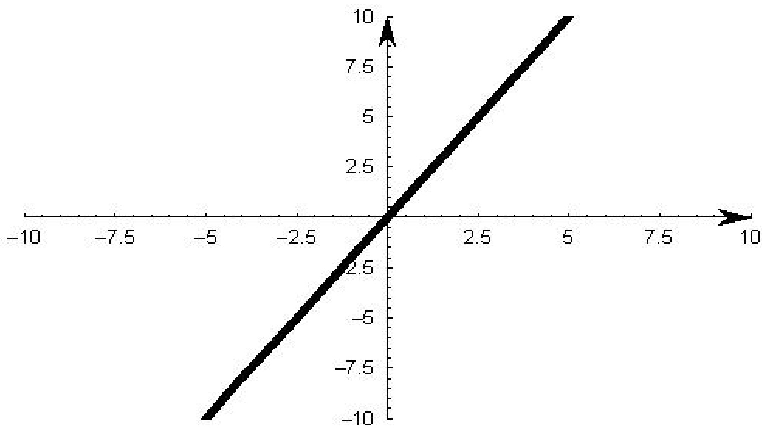
Această submulţime a planului se numeşte **reprezentarea geometrică** a graficului funcţiei. Reprezentarea grafică a unei funcţii $f : A \rightarrow B$ este, în general, o curbă, numită **curba reprezentativă a funcţiei** f şi notată $\mathbf{Cf} = \{M (x, y) \mid x \in A, y = f(x)\}$.

Prin abuz de limbaj, în loc de reprezentarea geometrică a unei funcţii vom spune simplu graficul funcţiei f.

Exemplu: Funcţia $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow R$, $f(x) = 2x$ are graficul $Gf = \{(-1, -2), (0, 0), (1, 2)\}$, iar reprezentarea grafică este formată din trei puncte: A(-1, -2), O(0, 0), B(1, 2).

Exemplu: Funcţia g : R $\to$ R, f(x) = 2x are graficul Gf reprezentat de o dreaptă iar reprezentarea sa grafică trece prin cele trei puncte: A(-1, -2), O(0, 0), B(1, 2) amintite mai sus.

y=g(x)=2x



Capitolul II
Proprietăţi ale funcţiilor
2.1. Funcţii pare, impare.

Definiţie: Despre mulţimea $D \subset R$ spunem că se numeşte mulţime simetrică dacă şi numai dacă : $\forall$ **x** $\in$ **D** $\Rightarrow$ **-x** $\in$ **D**

Definiţie: Fie $f : D \rightarrow R$, D **simetrică.** Despre funcţia f spunem că este:

a.**funcţie pară** dacă şi numai dacă: $\forall x \in D \Rightarrow f(-x) = f(x)$

b. **funcţie impară** dacă şi numai dacă: $\forall x \in D \Rightarrow f(-x) = - f(x)$

Observaţie: Dacă funcţia $f : D \rightarrow R$, (D simetrică) este:

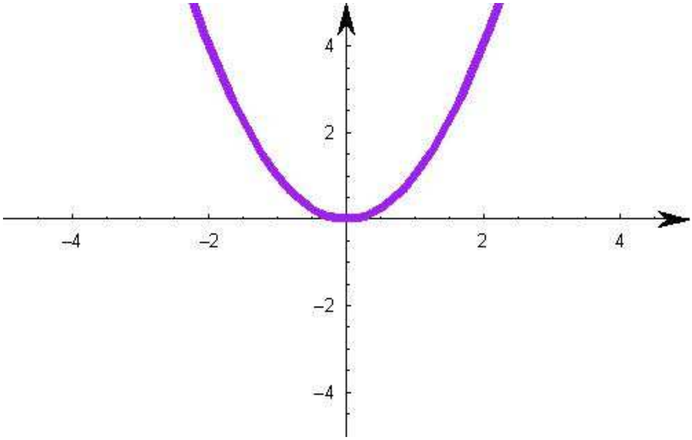
a.**funcţie pară** atunci G_f este simetric faţă de axa Oy

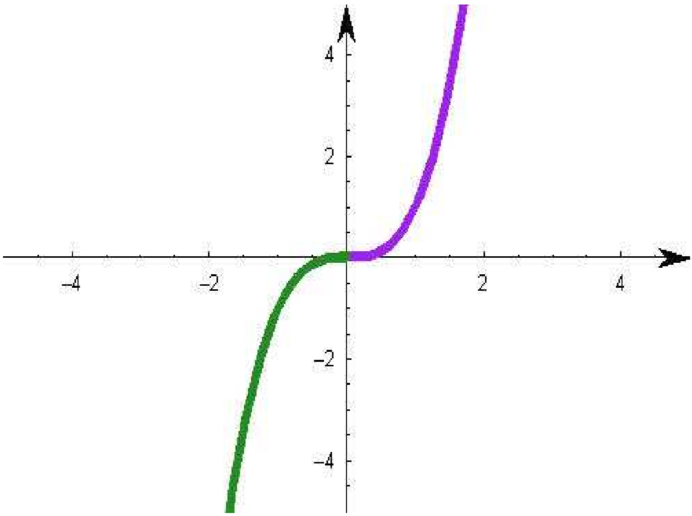
b.**funcţie impară** atunci G_f este simetric faţă de O (originea axelor de coordonate).

Exemple:

$\mathbf{Y_1=x^2}$

$\mathbf{Y_2=x^3}$





2.2. Funcţii monotone. Fie f : A $\rightarrow$ R, o funcţie de variabilă reală şi I $\subseteq$ A.

Definiţie: Despre funcţia f spunem că este:

a.**strict crescătoare** pe I $\subseteq$ A dacă: $(\forall)$ x_1, $x_2 \in$ I cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

b. **strict descrescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă: $(\forall)$ x_1, $x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

c.**crescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă: $(\forall)$ $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

d. **descrescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă: $(\forall)$ $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Observaţie: O funcţie f **crescătoare** pe I sau **descrescătoare** pe I se numeşte **monotonă** pe I. Dacă f este strict monotonă (sau monotonă) pe A (pe tot domeniul de definiţie) spunem simplu că funcţia f este strict monotonă (sau monotonă) fără a mai indica mulţimea. A studia monotonia unei funcţii $f : A \to R$ revine la a preciza submulţimile lui A pe care f este strict crescătoare (crescătoare) şi submulţimile lui A pe care f este strict descrescătoare (descrescătoare).

Pentru studiul monotoniei unei funcţii numerice $f : A \to R$, se utilizează **raportul**:

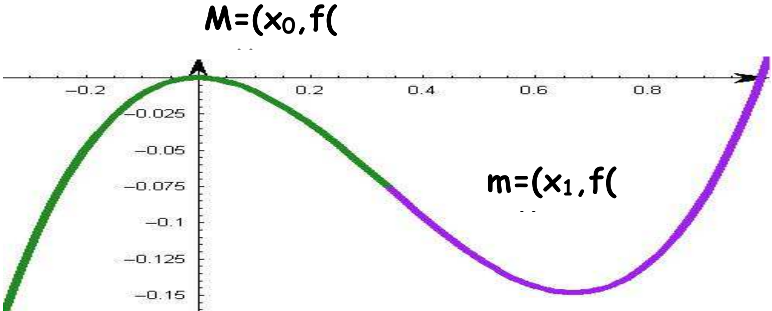
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ cu $x_1, x_2 \in A$ şi $x_1 \neq x_2$ numit **raportul de variaţie** asociat funcţiei f şi numerelor x_1, x_2. Diferenţa **($x_2 - x_1$)** se numeşte **variaţia argumentului**, iar diferenţa **($f(x_2)$ - $f(x_1)$)** se numeşte **variaţia funcţiei**. Prin urmare raportul de variaţie asociat lui f şi numerelor x_1, x_2 este raportul dintre variaţia funcţiei şi variaţia argumentului.

2.3. Valori extreme ale unei funcţii.

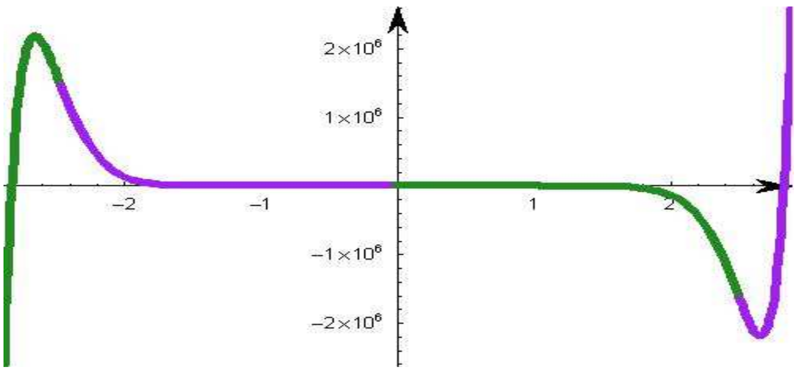
Definiţie: Fie funcţia numerică $f : A \to R$, $I \subseteq A$. Dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_0)$ se numeşte **maximumul local al funcţiei f pe mulţimea I** şi scriem $f(x_0) = \max f(x)$.

Punctul x_0 pentru care se obţine valoarea maximă a lui f pe I se numeşte **punct de maxim local pentru funcţia f pe I.** Dacă există $x_1 \in I$ astfel încât $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall x \in I$, atunci $f(x_1)$ se numeşte **minimumul local al funcţiei f pe mulţimea I** şi scriem $f(x_1) = \min f(x)$. Punctul x_1 pentru care se obţine valoarea minimă a lui f pe I se numeşte **punct de minim local pentru funcţia f pe I.** Valoarea maximă sau minimă a lui f pe I se numesc **valoari extreme ale funcţiei pe I**.

Exemplu: $f : R \to R$ $f(x) = x^3 - x^2$



Punctul x_0 de maxim sau x_1 de minim se numeşte **punct de extrem local pentru funcţia f pe I**.



Exemplu: Graficul de mai sus este graficul funcţiei: f : R $\to$ R ; $f(x)=x^{17}-8x^{15}$

Exemplu: Funcţia f definită prin tabelul de valori are valoarea maximă egală cu 8 şi se

atinge pentru x = -6.

x	-6	-4	-1	0	1	2
y = f(x)	8	3	-1	-5	0	1

Deci **max**f = f(-6)= 8. Punctul x = -6 este punct de maxim pentru funcţie. Valoarea minimă a lui f este egală cu –5 şi se obţine pentru x = 0. Deci min f = f(0) = -5. Punctul x= 0 este punctul de minim al funcţiei. În final, valorile extreme ale

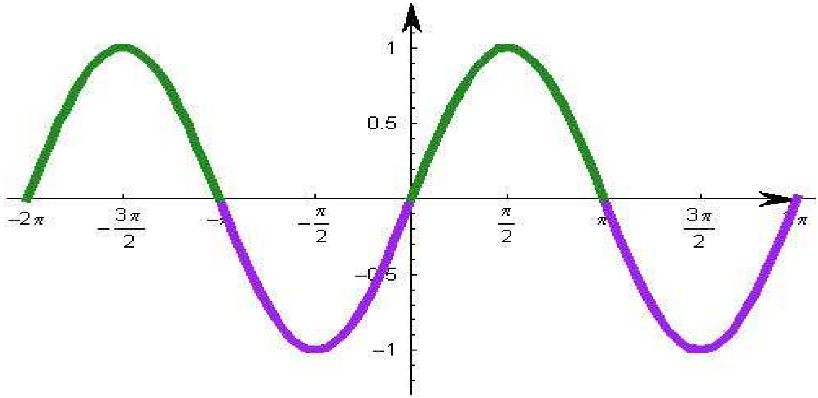
funcţiei sunt –5 şi 8, iar punctele de extrem sunt 0 şi respectiv –6.

2.4. Funcţii mărginite.

Definiţie: O funcţie numerica f: A $\to$ R (A$\subseteq$ R) se numeste **marginită** dacă există două numere reale m, M a.î. **m $\le$ f(x) $\le$ M**, $\forall$ x$\in$A.

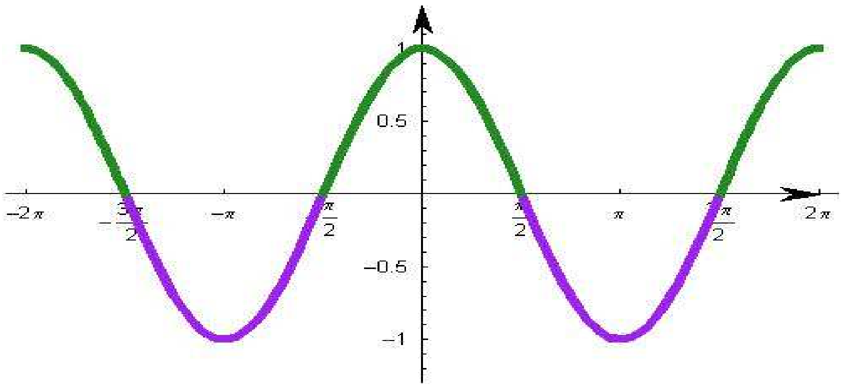
Exemplu: Funcţia **sin**x**:** R $\to$ [-1,1] al cărei grafic este reprezentat mai jos.

y=sinx



Exemplu: Funcţia **cos**x**:** R → [-1,1] al cărei grafic este reprezentat mai jos.

y=cosx



Semnificaţia geometrică a unei funcţii mărgintite este aceea că **graficul funcţiei este cuprins între dreptele orizontale y = m, y = M,** după cum se observă şi din graficele celor două funcţii prezentate în exemple de funcţii **sin x** şi **cos x** unde **M = 1** şi **m = -1**. O **definiţie echivlaentă** ar fi şi următoarea:

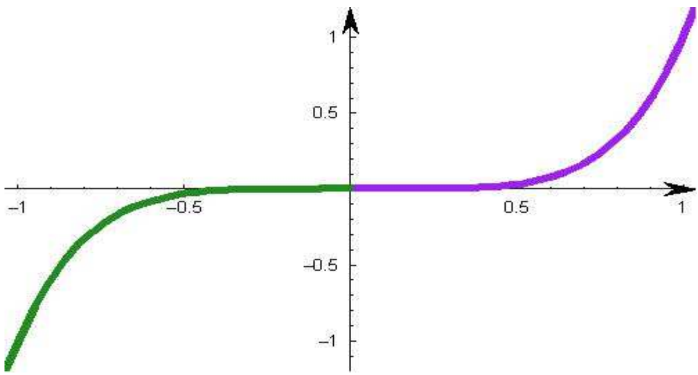
Definiţie: O functie numerica f: $A \to R$ ($A \subseteq R$) se numeste **marginită** dacă există numărul real M a.î. $|f(x)| \leq M$, $\forall\, x \in A$.

2.5. Funcţii injective.

Definiţie: : O funcţie f: $A \to B$ se numeste **functie injectivă** (sau simplu **injecţie**) dacă: $\forall\, x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Altfel spus: O funcţie f: $A \to B$ se numeste **functie injectivă** (sau simplu **injecţie**) dacă orice element din B este imaginea prin f a cel mult unui element din A, ceea ce-i echivalent cu faptul ca pentru orice $y \in B$ ecuatia $f(x) = y$ are cel mult o solutie $x \in A$.

Exemplu:



$y=x^5$

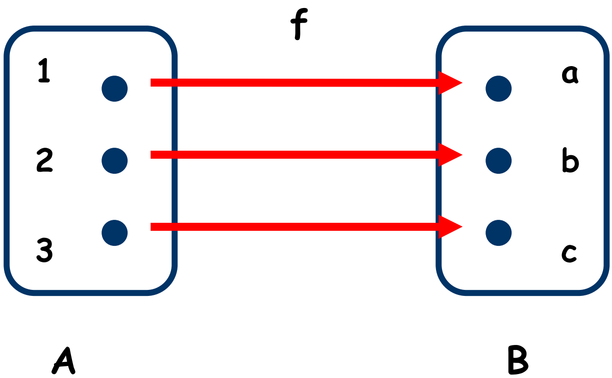
Exemplu:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x) = x^5$	-243	-32	-1	0	1	32	243

Utilizând un principiu al logicii formale potrivit căruia propoziţiile $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$, o altă modalitate de definire a unei funcţii injective ar fi:

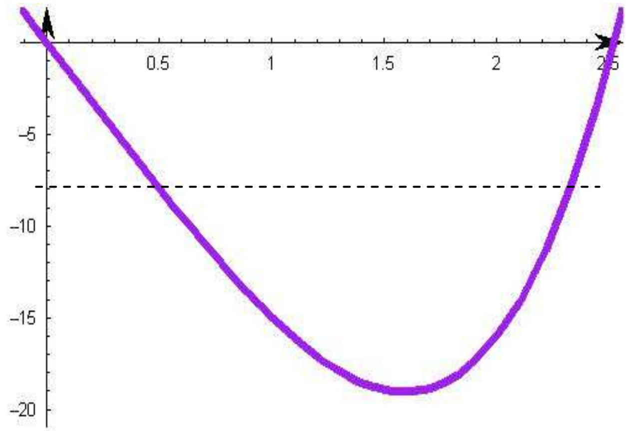
Definiţie: O funcţie f: A → B se numeste **functie injectivă** (sau simplu **injecţie**) dacă: din presupunerea $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exemplu: Funcţia definită sintetic prin diagrama de mai jos este o functi injectivă



Un **contraexemplu de funcţie ce nu este injectivă** este prezent în graficul de mai jos:

$y = x^4 - 16x$



Observăm că orice dreaptă y ‖ Ox dusă prin orice y $\geq -12*2^{2/3} \approx -19{,}05$ (minimumul global al funcţiei) intersectează graficul funcţiei în două puncte.

2.6. Funcţii surjective.

Definiţie: O funcţie f: A → B se numeste **funcţie surjectivă** (sau simplu **surjecţie**) ⇔ ∀ y ∈ B, ∃ x ∈ A astfel incat f(x) = y.

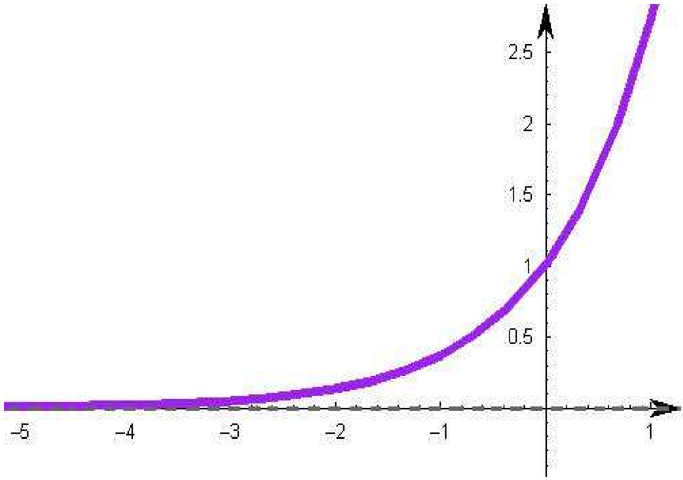
Este valabilă şi următoarea definiţie echivalentă cu prima.

Definiţie:O funcţie f: A → B se numeste **funcţie surjectivă** (sau simplu **surjecţie**) dacă orice element din B este imaginea prin f a cel puţin unui element din A, ceea ce-i echivalent cu faptul că pentru orice y ∈ B ecuatia f (x) = y are cel puţin o soluţie x ∈ A.

Sau f: A → B este surjectivă ⇔ f (A) =B, adică Im f = B.

Pe diagrama cu săgeţi o funcţie este surjectivă dacă la fiecare element din B ajunge cel puţin o săgeată. Graficul unei funcţii poate preciza daca funcţia este surjectivă. Altfel spus **Dacă orice paralela la Ox dusă printr-un punct al codomeniului taie graficul in cel putin un punct atunci funcţia f este surjectivă.**

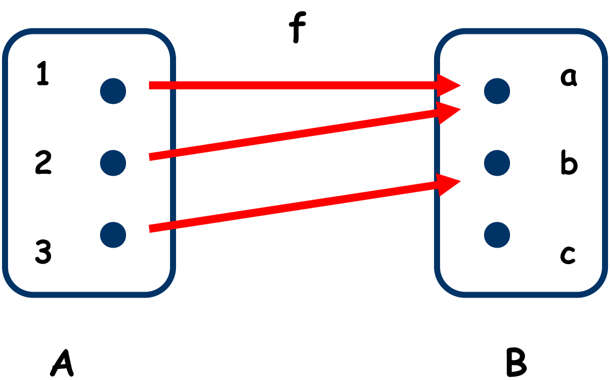
Exemplu: Funcţia e^x **:** R → (0, ∞)



$y=e^x$

Observaţie:

O funcţie f: A → B **nu este surjectivă** dacă exista y ∈ B astfel încât ∀ x ∈ A, f (x) ≠ y. Un astfel de **contraexemplu** poate fi definit în diagrama de mai jos.



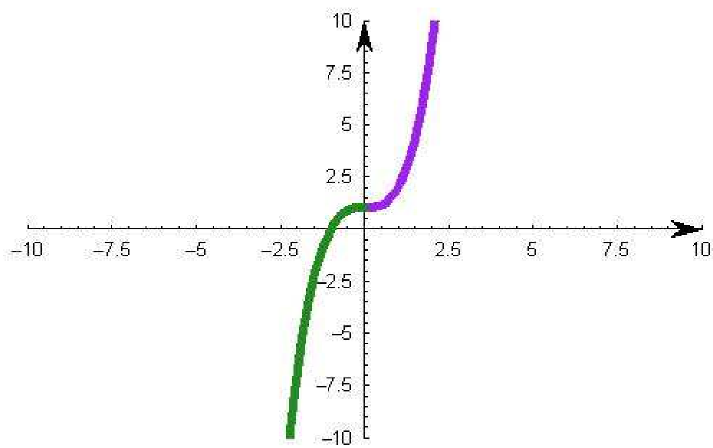
Elementului $c \in B$ nu-i corespunde nici o contraimagine din A.

2.7. Funcţii bijective

Definiţie: O funcţie $f: A \to B$ se numeste **funcţie bijectivă** (sau simplu **bijecţie**), dacă este atât injectivă cât şi surjectivă. Altfel spus funcţia $f: A \to B$ este **funcţie bijectivă** $\Leftrightarrow \forall\ y \in B, \exists!\ x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Simbolul $\exists!$ înseamna "există în mod unic".

Observaţie: Pe diagrama cu săgeti o funcţie este bijectivă dacă în fiecare element al codomeniului ajunge exact o săgeată. Se mai spune despre **funcţia bijectivă** că este o corespondenta "one to one" ("unu la unu") sau corespondenţă **biunivocă**. O funcţie numerică dată prin graficul său este bijectivă dacă orice paralelă la axa Ox dusă printr-un punct al codomeniului taie graficul în exact un punct.

Exemplu: Funcţia **f: R→ R** unde $f(x) = x^3 + 1$ este bijectivă (fiind dealtfel o funcţie **strict monotonă**).



$y = x^3 + 1$

2.8. Funcţii inversabile

Dacă f: A → B este **bijectivă,** atunci pentru orice element $y \in B$ există exact un element x din A astfel încât f(x) = y, ceea ce inseamna ca $x = f^{-1}(y)$ (adică preimaginea sau contraimaginea elementului y este elementul x).

Definiţie: Fie f: A → B o funcţie bijectivă Se numeşte **funcţie inversă** a funcţiei f, funcţia g: B → A, care asociază fiecărui element y din B elementul unic x din A astfel încât f(x) = y.

Notaţie: Pentru funcţia g utilizăm notatia f^{-1} (citim "f la minus unu"). O funcţie f care are inversă se spune ca este **invesabilă**.

Funcţia f se numeste **funcţie directă**, iar f^{-1} **funcţie inversă** (a lui f).

Exemplu: Pentru funcţia f **: R → R** descrisă de forma analitică **f**(x)=2x+1 admite ca funcţie inversă $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

Din punct de vedere grafic cele două drepte sunt simetrice faţă de dreapta de ecuaţie

y = x (ecuaţia primei bisectoare), după cum se observă în graficul comparativ de mai jos.

2.9 Funcţii convexe, concave. Considerăm funcţia f: I → R unde I – interval. Atunci are loc următoarea:

Definiţie: a) despre funcţia f spunem că este **convexă** pe intervalul I dacă: $\forall\ x_1, x_2 \in I$, $\forall\ q_1, q_2 \geq 0$ astfel încât $q_1 + q_2 = 1$ avem: $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ (1)

b) despre funcţia f spunem că este **concavă** pe intervalul I dacă: $\forall$ $x_1, x_2 \in I$, $\forall$ $q_1, q_2 \geq 0$ astfel încât $q_1 + q_2 = 1$ avem: $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ (2)

Observaţie: Dacă în inegalităţile (1) şi (2) avem inegalitate strictă se spune că funcţia f este **strict convexă** respectiv **strict concavă.**

Noţiunea de funcţie convexă respectiv concavă a fost introdusă J. Jensen[2] care a pornit de la o relaţie mai particulară decât (1) şi(2), anume:

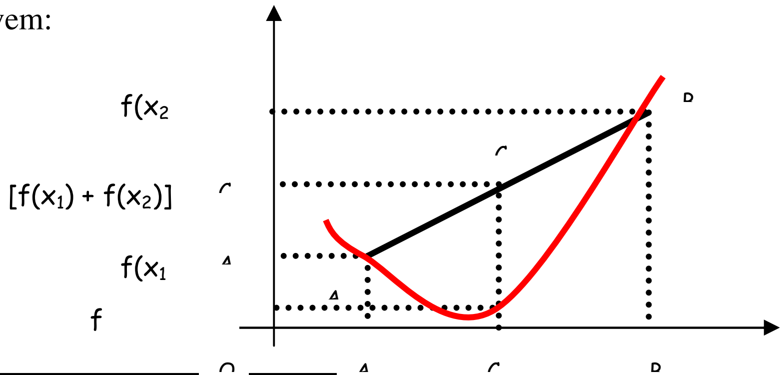
a) despre funcţia f spunem că este **convexă** pe intervalul I dacă: $\forall$ $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x2)}{2} \;;$$

b) despre funcţia f spunem că este **convcavă** pe intervalul I dacă: $\forall$ $x_1, x_2 \in I$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x2)}{2}$$

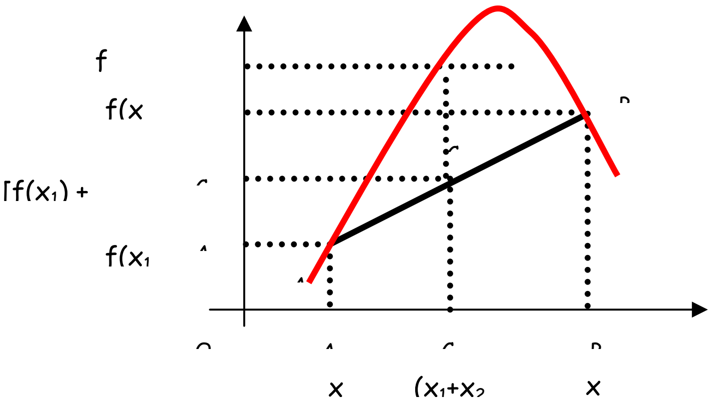
Din punct de vedere grafic pentru o funcţie convexă avem:



[2] **Johan Ludwig William Valdemar Jens[illegible]** [illegible]oscu[illegible] [illegible]e **Joh[illegible]sen,** (Mai 8, 1859 – Martie 5, 1925), matem[illegible] şi ing[illegible], [illegible]celebru pentru inegalitatea ce-i poartă numele.

Exemplu: f: R$\rightarrow$ R f(x) = x^2 este o funcţie convexă

Din punct de vedere grafic pentru o funcţie concavă avem:



Exemplu: f: R$\rightarrow$ R f(x) = - x^2 este o funcţie concavă.

Observaţie: Funcţia de gradul II-lea de forma $f(x)=ax^2+bx+c$ unde f: R$\rightarrow$ R este:

a. convexă pe **R** dacă a > 0

b. concavă pe **R** dacă a < 0

2.10. Funcţii periodice.

Definiţie: Fie T $\in$ **R*** şi f: D $\rightarrow$R, unde D $\subset$ R o mulţime cu proprietatea

$\forall$ x $\in$ D $\Rightarrow$ x+T $\in$ D şi x -T $\in$ D. Despre f: D $\rightarrow$R spunem că este periodică de perioada T dacă f(x+T)= f(x) (1). **Cel mai mic întreg pozitiv T** pentru care este îndeplinită relaţia (1) se **numeşte perioada principală a lui f.**

Exemple:

1. Funcţiile trigonometrice **sinx, cosx** sunt periodice de perioada principală $\mathbf{2}\pi$

2. Funcţia lui **Dirichlet**[3] : f(x)= $\begin{cases} 1 \leftarrow x \in Q \\ 0 \leftarrow x \in R - Q \end{cases}$ este periodică având ca perioada orice număr raţional.

[3] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 – 1859, matematician francez

Capitolul III

Operaţii cu funcţii

3.1. Operaţii algebrice cu funcţii.

Definiţie: Fie A, B $\subseteq$ R. O funcţie f: A $\to$ B se numeşte funcţie numerică sau funcţie reală de variabilă reală.

Definiţie(Operaţii cu funcţii):

a) Funcţia **(f+g):** A $\to$ R definită prin (f+g) (x) = f (x) + g (x), $\forall$ x $\in$ A, se numeşte **suma** dintre funcţia f şi funcţia g.

b) Funcţia **(f*g) :** A $\to$ R definită prin (f*g) (x) = f (x) * g(x), $\forall$ x $\in$ A, se numeşte **produsul** dintre funcţia f şi funcţia g.

c) Funcţia $(\frac{f}{g})$ **:** A – { x | g (x) = 0 } $\to$ R definita prin $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall$ x $\in$ A, g (x) $\neq$ 0 se numeşte **câtul** dintre funcţia f şi funcţia g.

Definiţie:

a) Se defineşte **produsul** dintre un **număr real** α **şi o funcţie** f : A $\to$ R, ca fiind functia αf : A $\to$ R, (αf) (x) = αf(x), $\forall$ x $\in$ A.

b) Dacă f : A $\to$ R, atunci definim **diferenţa dintre funcţia f şi funcţia g** ca fiind funcţia f – g : A $\to$ R, (f - g) (x) = f(x) – g (x), $\forall$ x $\in$ A. De fapt, diferenţa f - g este suma f + (-g), unde –g = (-1) g.

Exemplu: Fie f, g : R → R, f(x) = 3x+1, g(x) = - x +3. Atunci f + g, f- g, f*g : R → R sunt definite astfel:

(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 – x +3 = 2x + 4.

(f - g)(x) = f(x) – g(x) = 3x+1 –x + 3 = 4x – 2.

(f*g)(x) = f(x)*g(x) = (3x + 1)(-x + 1) = $-3x^2$+2x+1.

Proprietăţi ale adunării funcţiilor

Fie F (A, R) mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A cu valori in R. Atunci are loc:

Teoremă: Pentru operaţia de adunare pe F (A, R) au loc proprietăţile:

1) (f +g) + h = f + (g + h), ∀f, g, h ∈ F (A, R) (adunarea funcţiilor este **asociativă**);

2) f + g = g + f , ∀ f, *g* ∈ F(A, R) (adunarea funcţiilor este **comutativă**);

3) exista functia **0** ∈ F (A, R), **0**(x) = 0, ∀ x ∈ A astfel incat f + **0** = **0** + f = f, ∀f ∈ F(A, R) (**0** se numeşte **funcţie nulă** şi este **element neutru** pentru adunarea funcţiilor);

4) ∀f ∈ F (A, R), ∃(-f) ∈ F (A, R) astfel încât f + (-f) = (-f) + f = **0** (orice funcţie f are o opusa (-f)).

Proprietăţi ale înmulţirii funcţiilor.

Teoremă: Pentru operaţia de înmulţire pe F (A, R), au loc proprietăţile:

1) $(f * g) * h = f * (g * h)$, $\forall f, g, h \in F(A, R)$ (înmulţirea funcţiilor este **asociativă**);

2) $f * g = g * f$, $\forall f, g \in F(A, R)$ (înmulţirea funcţiilor este **comutativă**);

3) există functia $\mathbf{1} \in F(A, R)$, $\mathbf{1}(x) = 1$, $\forall x \in A$ astfel incat $f * \mathbf{1} = \mathbf{1} * f = f$

$\forall f \in F(A, R)$ (**1** se numeste **funcţia unitate** pe mulţimea A).

Propoziţie: Înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea pe F(A, R), adica:

$f * (g + h) = fg + fh$, $\forall f, g, h \in F(A, R)$.

3.2. Compunerea funcţiilor

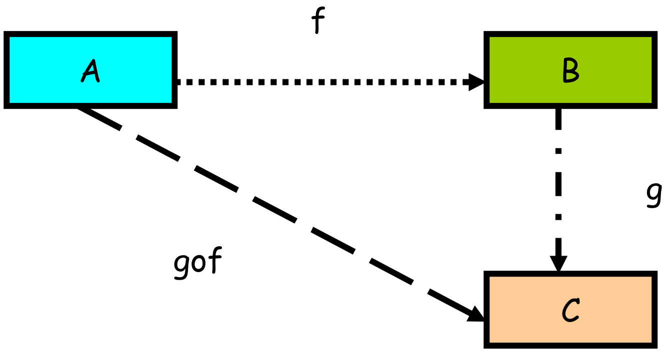
O altă operaţie care se poate efectua asupra a două funcţii este cea de **compunere.**

Fie $f: A \to B$, $g : B \to C$, două funcţi cu următoarea particularitate: **codomeniul lui f este egal cu domeniul lui g.**

Cu ajutorul acestor funcţii se poate construi o altă funcţie $h : A \to C$. Funcţia h astfel definită se notează gof (citim “g compus cu f”) şi reprezintă compunerea funcţiei g cu f (în această ordine). Funcţia gof are domeniul lui f (prima funcţie care acţionează în această compunere) şi codomeniul lui g (ultima care acţionează în compunere).

Definiţie. Fie A, B, C mulţimi nevide şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$.

Se numeşte **compusa funcţiei g cu funcţia f**, considerată în această ordine, funcţia notată gof , definită astfel: $\mathbf{gof : A \to C}$, $\mathbf{(gof)(x) = g(f(x))}$, $\forall x \in A$.



Observaţii.

a) Funcţia compusă gof a două funcţii f, g nu poate fi definită decât dacă codomeniul lui f coincide cu domeniul de definiţie a lui g.

b) Dacă $f : A \to B$, $g : B \to A$, atunci are sens fog şi gof. Însă în general însă gof $\neq$fog.

Teoremă: Fie $f,g,h \in F(R)$. Atunci au loc relaţiile:

○ **Asociativitatea compunerii**
$\forall$ f g , h $\in$ F avem fo(goh) = (fog)oh

○ **(ne)Comutativitatea**
$\exists$ f, g $\in$ F a.î. fog $\neq$ gof

○ **Element neutru**
$\exists$ o funcţie $1_A \in F$ a.î. $\forall$ $f \in F$ avem $fo1_A = 1_Aof = f$; $1_A : A \to A$; $1_A(x) = x$ (funcţie identică pe A)

○ **Elemente simetrizabile**
Funcţia inversă: $f : A \to B$, $g : B \to A$; g se numeşte inversa (notaţie: $g = f^{-1}$) lui f dacă: fog = 1_B şi gof = 1_A

Proprietăti:

a) $g = f^{-1} \Leftrightarrow (gof)(x) = x \ \ (fog)(x) = x$;

b) $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in A$ şi $f(f^{-1}(x)) = x \ \forall x \in B$;

c) f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijecţie

Observaţie: Nu toate funcţiile admit inverse!

Capitolul IV

Teoreme de caracterizare a funcţiilor

4.1 Monotonia unei funcţii.

Teoremă: Fie $f : A \to R$ o funcţie numerică şi $I \subset A$. Atunci:

a. f este **strict crescătoare (crescătoare)** pe I $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > (\geq)\ 0$,

$(\forall)\ x_1, x_2 \in I\ x_1 \neq x_2$;

b. f este **strict descrescătoare (desccrescătoare)** pe I $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < (\leq) 0$,

$(\forall)\ x_1, x_2 \in I\ x_1 \neq x_2$;

Demonstraţie: Fără a restrânge generalitatea teoremei vom demonstra doar punctul a demonstraţia de la punctul b fiind asemănătoare.

„$\Rightarrow$" presupunem că f este **strict crescătoare** pe I $\Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2 \in$ I cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Atunci din $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$ (1)

Atunci din $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ (2)

Atunci din (1) şi (2) prin efectuarea raportului $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

„$\Leftarrow$” Presupunem că pentru funcţia $f : A \to R$ o funcţie numerică şi $I \subset A$ sunt satisfăcute condiţiile: $(\forall)$ x_1, $x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$ şi $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$

Atunci din $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$ (1’)

Atunci din $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ (2’)

Atunci din (1’) şi (2’) $\Rightarrow$ $f(x_2)-f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ funcţia este strict crescătoare.

4.2 Injectivitatea unei funcţii

Teoremă: Pentru funcţia f**:** **A** → **B** unde A, B $\subseteq$ **R** sunt echivalente următoarele afirmaţii:

a. funcţia f este injectivă;

b. $\forall$ x_1, $x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

c. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

d. Pentru $\forall$ $y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie $x \in A$;

e. Orice paralelă la axa Ox, dusă printr-un punct al codomeniului, taie graficul funcţiei în cel mult un punct.

4.3 Monotonia şi injectivitatea unei funcţii

Teoremă: Fie $f : A \to R$ o funcţie numerică strict monotonă pe A. atunci funcţia f este injectivă.

Demonstraţie: Considerăm o funcţie $f : A \to R$ strict crescătoare (în mod asemănător se procedează şi pentru o funcţie strict descrescătoare). Fie x_1, $x_2 \in A$ cu $\mathbf{x_1 \neq x_2}$.

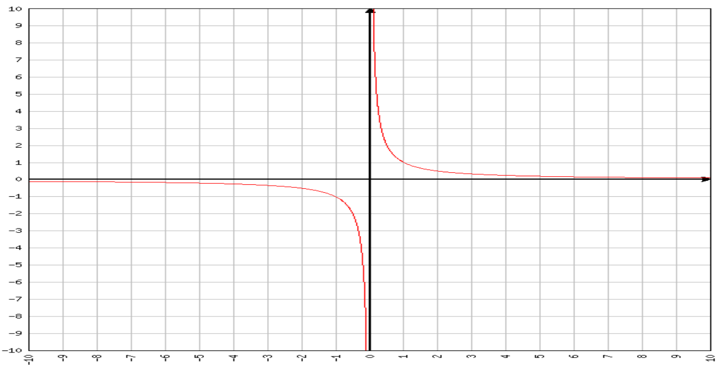
Din $x_1 \neq x_2$ rezultă una din situaţiile: $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Cum funcţia este strict crescătoare avem:

Dacă $x_1 < x_2$ atunci $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ deci $f(x_1) \neq f(x_2)$

Dacă $x_1 > x_2$ atunci $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ deci $f(x_1) \neq f(x_2)$

Adică pentru orice caz avem $\mathbf{f(x_1) \neq f(x_2)}$ $\Rightarrow$ f este injectivă.

Observaţie: Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată după cum se observă în exemplul următor**.**



Graficul funcţiei f(x)=1/x

Exemplu: f**:** **R*** → **R** descrisă de formula $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este o funcţie injectivă dar nu este strict monotonă, după cum se observă din graficul funcţiei.

Observaţie: f**:** **R*** → **R** descrisă de formula $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi strict crescătoare pe $(0, +\infty)$

4.4 Surjectivitatea unei funcţii

Teoremă: Funcţia f**:** **A** → **B** este surjectivă dacă şi numai dacă **Im f = B**

Demonstraţie: „$\Leftarrow$" este imediată

„$\Rightarrow$” Egalitatea a două mulţimi se demonstrează prin dubla incluziune. Avem întotdeauna $f(A)\subseteq B$ (1). Fie acum $y\in B$, cum f este surjectivă, există atunci $x\in A$, astfel încât $f(x)=y$. Deci $y\in f(A)$. De aici rezultă $B\subseteq f(A)$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $f(A)= B$.

Observaţie: Funcţia f**: A → B** nu este surjectivă dacă $f(A)\neq B$

Teoremă: Pentru funcţia f**: A → B** unde A, B $\subseteq$ **R** sunt echivalente următoarele afirmaţii:

a. funcţia f este surjectivă;

b. $\forall\ y \in B, \exists\ x \in A$, astfel încât $f(x) = y$;

c. Pentru $\forall\ y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie $x \in A$;

d. $\text{Im } f = f(A) = B$;

e. Orice paralelă dusă la axa Ox printr-un punct al codomeniului taie graficul funcţiei în cel puţin un punct.

4.5 Bijectivitate unei funcţii.

Terorema: Pentru funcţia f**: A → B** unde A, B $\subseteq$ **R** sunt echivalente următoarele afirmaţii:

a. f este bijectivă;

b. f este injectivă şi surjectivă în acelaşi timp;

c. Pentru $\forall\ y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are o unică soluţie $x \in A$;

d. Orice paralelă dusă la axa Ox printr-un punct al codomeniului taie graficul funcţiei în exact un punct.

4.6 Compunerea funcţiilor injective, surjective, bijective.

Teoremă: Fie funcţiile f**:** **A** $\rightarrow$ **B,** g**:** **B** $\rightarrow$ **C.** Dacă:

a. f,g sunt surjective $\Rightarrow$ funcţia gof este surjectivă;

b. f,g sunt injective $\Rightarrow$ funcţia gof este injectivă;

c. f,g sunt bijective $\Rightarrow$ funcţia gof este injectivă;

d. gof este injectivă $\Rightarrow$ f este injectivă;

e.gof este surjectivă $\Rightarrow$ g este surjectivă ;

Bibliografie

Johan Ludwig William Valdemar Jensen, cunoscut sub numele de **Johan Jensen**, (Mai 8, 1859 – Martie 5, 1925), matematician şi inginer danez, celebru pentru inegalitatea ce-i poartă numele.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 – 1859, matematician francez